連続関手と一般ホモロジー(変換群の理論とその応用)

島川, 和久

数理解析研究所講究録
第 1569 巻 2007 年 35-42

連続関手と一般ホモロジー

岡山大学大学院自然科学研究科　島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)
Department of Mathematics, Okayama University

1　はじめに

よく知られているように，一般ホモロジー論，あるいはそれと対をなす概念である一般コホモロジー論はスペクトラムにより表現される。しかし，スペクトラムの構成に関しては統一的な方法がなく，また，スペクトラムの定義自体にもスマートとは言い難い部分がある。

ここでは，通常のスペクトラムの代わりに連続関手の概念を用いて一般ホモロジー論を構成する方法を紹介する。今のところ，この方法でスペクトラムを用いる従来の方法を完全に置き換えられる訳ではないが，幾つかの点で理論的優位性があるところを観て貰えるならば幸いである。

2　空間の圏

よく知られているように，位相空間のカテゴリーはそのままではデカルト閉（cartesian closed）ではなく，自然な対応

$$\hom(X \times Y, Z) \cong \hom(X, Z^Y)$$

は必ずしも同型にはならない。しかし，位相を特別なタイプのものに制限し，部分空間や積空間，写像空間等への位相の入れ方をそれに合わせて変更することにより，デカルト閉であるようなカテゴリーを構成することができる。ただし，実用上の観点から，我々が普段取扱う空間（とくに局所コンパクト空間）に対しては，新たに導入した位相が通常の位相（直積位相，コンパクト開位相等）と一致することが望ましい。

そのような都合のよい空間のカテゴリーの例としては，コンパクト生成ハウスドルフ空間のカテゴリーが有名である。しかし，ハウスドルフ性は商空間をとる操作で保たれないため，このカテゴリーは構成的な手法を用いる理論を展開するには不向きである。そのため，ここではコンパクト性を若干弱めた概念であるコンパクト生成弱ハウスドルフ空間のカテゴリーを枠組として使用することにする。

以下，空間といえばコンパクト生成弱ハウスドルフ空間を指すものとし，基点付き（コンパクト生成弱ハウスドルフ）空間と基点を保つ連続写像のなすカテゴリーを Top_* とかく。また，写像空間を表す記号として Y^X の代わりに $\mathrm{Map}_0(X,Y)$ を用いる。

3　連続関手から定まる一般ホモロジー論

どのような X, $Y \in \mathrm{Top}_*$ に対しても，写像

$$\mathrm{Map}_0(X,Y) \to \mathrm{Map}_0(FX,FY), \quad f \mapsto Ff$$

が連続であるような共変関手 $F\colon \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ を連続関手とよぶ。

命題 1. 連続関手 $F\colon \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ に対して，次が成り立つ。

(1) どの連続写像 $W \wedge X \to Y$ からもペアリング

$$W \wedge FX \to FY, \quad FW \wedge X \to FY$$

が自然に定まる。

(2) F はホモトピー関手である。すなわち，

$$f \simeq g\colon W \to X \text{ ならば } Ff \simeq Fg\colon FW \to FX$$

が成り立つ。

とくに，恒等写像 $S^1 \wedge X \to \Sigma X$ から誘導されるペアリング

$$\Sigma FS^n = S^1 \wedge FS^n \to F(\Sigma S^n) = FS^{n+1}$$

により，族 $\{FS^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ は（プリ）スペクトラムである。

定義 2. どのような空間対 (X,A) に対しても，包含写像によって誘導される系列

$$FA \to FX \to F(X \cup CA)$$

がホモトピーファイバー系列となるような連続関手 $F\colon \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ を安定連続関手とよぶ。

X を基点付き空間とし，各整数 n に対して，

$$h_n(X,F)=\begin{cases}\pi_n FX, & n\geqq 0\\ \pi_0 F(\Sigma^{-n}X), & n<0\end{cases}$$

と定める。このとき

定理 3. 対応 $X\mapsto\{h_n(X,F)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ は一般ホモロジー論である。

実際，ホモトピー性質は命題の帰結であり，一方，系列

$$h_n(A,F)\to h_n(X,F)\to h_n(X\cup CA,F)$$

の完全性は安定連続関手の定義そのものである。また，これら二つの性質と Puppe 系列から直ちに懸垂同型 $h_n(X,F)\cong h_{n+1}(\Sigma X,F)$ が得られる。

注意 4. F が安定連続関手であれば，$\{FS^n\mid n\in\mathbf{Z}\}$ は Ω スペクトラムであり，それから定義される一般ホモロジー論は $X\mapsto\{h_n(X,F)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ に他ならない。

4 ラベル付き配置空間と一般ホモロジー

基点付き空間 M に対して，以下に列挙する性質をみたす写像の族

$$M^n\to M,\quad (a_1,\ldots,a_n)\mapsto\sum\nolimits_{j=1}^n a_j\ (n\geq 0)$$

が存在するとき，M をパーシャル・モノイドとよぶ。ただし，各 $(a_1,\ldots,a_n)\in M^n$ と $\{1,\ldots,n\}$ の部分集合 $J=\{j_1,\ldots,j_s\}$ に対して，$(a_{j_1},\ldots,a_{j_s})\in M_s$ が成り立つとき，部分列 $(a_{j_1},\ldots,a_{j_s})$ の $M_s\to M$ による像を $\sum_{j\in J}a_j$ とかくことにする。すなわち，$\sum_{j\in J}a_j=\sum_{\alpha=1}^s a_{j_\alpha}$ である。

1. $M_0\to M$ は包含写像 $\{0\}\subset M$ である。

2. $M_1\to M$ は恒等写像である。

3. $(a_1,\ldots,a_n)\in M^n$ に対し，$\{1,\ldots,n\}$ の分割 $J_1\coprod\cdots\coprod J_r=\{1,\ldots,n\}$ があって，すべての k に対して部分和 $\sum_{j\in J_k}a_j$ が存在すると仮定する。このとき，

$$(a_1,\ldots,a_n)\in M_n \iff \Bigl(\sum\nolimits_{j\in J_1}a_j,\ldots,\sum\nolimits_{j\in J_r}a_j\Bigr)\in M_r$$

であり，どちらかの（したがって，双方の）条件がみたされるならば，

$$\sum\nolimits_{j=1}^n a_j=\sum\nolimits_{j\in J_1}a_j+\cdots+\sum\nolimits_{j\in J_r}a_j$$

が成り立つ。

例 5. 以下は代表的なパーシャル・モノイドの例である。

(a) 全ての基点付き空間 X。ただし，$X_n = X \vee \cdots \vee X$ とし，$X_n \to X$ は折り畳み写像。

(b) 単位元を含むような位相アーベル群のかってな部分集合 M。ただし，

$$M_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mid a_1 + \cdots + a_n \in M\}$$

とし，$M_n \to M$ は写像：$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 + \cdots + a_n$。

(c) $\mathbb{R}^\infty$ 内の有限次元部分ベクトル空間のなすグラスマニアン $\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)$，ただし，

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)_n = \{(V_1, \ldots, V_n) \mid V_i \perp V_j \text{ if } i \neq j\} \subset \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)^n$$

とし，$\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)_n \to \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)$ は直和をとる写像：$(V_1, \ldots, V_n) \mapsto V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_n$。

(d) かってな基点付き空間 X とパーシャル・モノイド M のスマッシュ積。ただし，

$$(X \wedge M)_n = \{(x \wedge a_1, \ldots, x \wedge a_n) \mid x \in X,\ (a_1, \ldots, a_n) \in M_n\}$$

とし，$(X \wedge M)_n \to X \wedge M$ は $M_n \to M$ から誘導される写像。

M がパーシャル・モノイドであるとき，M の元の有限列全体のなす空間（すなわち，非交和 $\coprod_{p \geq 0} M^p$）をとり，同値関係

$$(a_1, \ldots, a_p) \sim (b_1, \ldots, b_q)$$

を，写像 $\theta\colon \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, q\}$ が存在して

$$b_j = \textstyle\sum_{i \in \theta^{-1}(j)} a_i \quad (1 \leq j \leq q)$$

が成り立つことと定める。この同値関係に関する商空間を $B(M)$ とかく。

かってな空間 V に対して，スマッシュ積 $V_+ \wedge M = V \times M / V \times 0$ もパーシャル・モノイドである。

定義 6. $v_1, \cdots, v_n$ がすべて相異なる列 $(v_j, a_j) \in (V \times M)^n$ で代表されるような元全体からなる $B(V_+ \wedge M)$ の部分空間を $C(V, M)$ とかく。すなわち，

$$C(V, M) = \{[v_j, a_j] \in B(V_+ \wedge M) \mid\ i \neq j \text{ ならば } v_i \neq v_j\}$$

具体的には，$C(V, M)$ は V の有限部分集合 S と写像 $\sigma\colon S \to M$ からなる対 (S, σ) からなる集合と見なすことができる。ただし，二つの対 (S, σ) および (S', σ') の間に下の関係が成り立つとき，それらは同一視される。

$$S \subset S', \quad \sigma' | S = \sigma, \quad x \notin S \text{ ならば } \sigma'(x) = 0$$

以後，主に $V=\mathbb{R}^\infty$ の場合を取り扱い，さらに，M と X を区別するため，

$$C^M(\mathbb{R}^\infty, X) = C(\mathbb{R}^\infty, X \wedge M)$$

とかく。このとき，射影 $X \vee Y \to X$ および $X \vee Y \to Y$ により誘導される自然変換

$$\rho\colon C^M(\mathbb{R}^\infty, X \vee Y) \to C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \times C^M(\mathbb{R}^\infty, Y)$$

はホモトピー同値写像である。したがって，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は，積

$$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)^2 \xrightarrow{\rho^{-1}} C^M(\mathbb{R}^\infty, X \vee X) \xrightarrow{\nabla} C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$$

に関して，ホモトピー可換かつホモトピー結合的ホップ空間となる。ただし，ρ^{-1} は $C^M(\mathbb{R}^\infty, X \vee X) \xrightarrow{\rho} C^M(\mathbb{R}^\infty, X)^2$ のホモトピー逆写像であり，∇ は折り畳み写像 $X \vee X \to X$ により誘導される。

$E^M(X) = \Omega C^M(\mathbb{R}^\infty, \Sigma X)$ とかこう。ただし，$\Sigma X = S^1 \wedge X$ である。すると，ホップ空間の間の写像 $C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to E^M(X)$ が，合成写像

$$S^1 \wedge C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{l\wedge 1} \mathrm{Map}_0(X, \Sigma X) \wedge C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\varepsilon} C^M(\mathbb{R}^\infty, \Sigma X)).$$

から導かれる。ただし，l は $v \in S^1$ に対して，基点を保つ写像 $x \mapsto v \wedge x$ を対応させる写像とし，ε は評価写像 $f \wedge x \mapsto f_*(x)$ をあらわす。

定理 7 ([4, Proposition 4.5]). (1) 写像 $C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to E^M(X)$ は群完備化写像である。すなわち，任意の可換環係数ホモロジーにおいて，誘導準同型

$$H_\bullet(C^M(\mathbb{R}^\infty, X))[\pi^{-1}] \cong H_\bullet(E^M(X))$$

はポントリャーギン環としての同型射である。ただし，$\pi = \pi_0 C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ とする。

(2) $E^M\colon \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ は安定連続関手であり，対応 $X \mapsto \{h_n(X, E^M)\}$ は一般ホモロジー論である。

5 古典的な例

5.1 通常ホモロジー

M として自然数のなす可換可換群 N をとれば，$C^{\mathrm{N}}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は無限対称積 $\mathrm{SP}^\infty X$ であり，Dold-Thom 定理により，$X \mapsto \pi_\bullet E^{\mathrm{N}}(X)$ は整係数特異ホモロジー論で ある。（Dold-Thom 定理）

5.2 安定ホモロジー

M として Z の部分集合 $\{0,1\}$ をとれば，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は通常の配置空間 $C(\mathbb{R}^\infty, X)$ であり，とくに，X が連結であれば，無限ループ空間 $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ に弱同値である ([3])。この場合，$X \mapsto \pi_\bullet E^M(X)$ は安定ホモロジー論である。(Barratt-Priddy-Quillen 定理)

位相アーベル群 A の（単位元を含む）任意の部分集合はパーシャル・モノイドであった。この場合，M を $\pm M = \{a - b \mid a, b \in M\}$ で置き換えることにより，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ の群完備化を構成することができる。

定理 8 ([5, Theorem 1]). M は位相アーベル群 A の単位元を含む部分集合であるとする。このとき，包含写像 $M \subset \pm M$ により誘導される写像

$$C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

は群完備化写像であり，したがって，ホモロジー論の自然同型

$$\pi_\bullet E^M(X) \cong \pi_\bullet C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

が存在する。

特別な場合として，自由加群 Z の部分集合 M を考えよう。前節の例で述べたように M として，$\{0,1\}$ をとれば安定ホモトピー論が得られ，一方，自然数全体 $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ からは整係数特異ホモロジー論が得られる。そこで，これら二つとは異なる一般ホモロジー論が Z の部分集合から構成できるか否かが問題となる。M が有限集合である限り，そのようなものは存在し得ないことを，上の定理を用いて示すことができる。すなわち，

定理 9. M は 0 を含む Z の有限部分集合とする。もし，M が 0 と異なる元を一つ以上含み，さらに作用 $n \mapsto -n$ に関して閉じているならば，任意の X に対して，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は無限ループ空間 $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ に弱ホモトピー同値である。

注意 10. $M = \{0,1\}$ の場合，$C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X) = C^{\pm}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は，Mcduff [2] が導入した " the space of positive and negative particles" に他ならない。Caruso は [1] において，X が局所同等連結（すなわち，対角写像 $X \to X \times X$ がコファイブレーション）であれば，$C^{\pm}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は無限ループ空間 $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ に弱同値となることを示している。したがって，定理 8 は M および X の双方に関する Caruso の結果の一般化である。

$\pi_\bullet E^M(X)$ が $\pi_\bullet C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$ と同型であることから次も示される。

系 11. 零を含む Z のかってな有限部分集合 M に対し，$\pi_\bullet E^M(X)$ は X の安定ホモトピー群である。

定理 8 から定理 9 がどのように導かれるかを以下に示そう。

M が定理 9 の条件をみたすとき，$C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ は群状，すなわち，$\pi_0 C^M(\mathbb{R}^\infty, X)$ が群であり，定理 8 によって，自然な写像 $C^M(\mathbb{R}^\infty, X) \to C^{\pm M}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は弱ホモトピー同値となる。より一般的に，$(\pm)^0 M = M$ とし，1 以上の k に対して

$$(\pm)^k M = \pm((\pm)^{k-1} M)$$

と定める。すると，包含写像 $(\pm)^k M \subset (\pm)^l M$ が誘導する写像

$$C^{(\pm)^k M}(\mathbb{R}^\infty, X) \to C^{(\pm)^l M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

は弱ホモトピー同値である。ただし，$k \leq l$ とする。

M に属する整数全体の最大公約数を d とかく。有限集合 M の元はすべて d の倍数なので，$M \subset (\pm)^j\{0, d\} = \{0, \pm d, \ldots, \pm jd\}$ をみたす整数 $j \geq 1$ が存在する。

一方，d は M の元の整数を係数とする一次結合としてあらわされることから，$d \in (\pm)^k M$ をみたす $k \geq 1$ が存在することがわかる。したがって，

$$\pm\{0, d\} \subset (\pm)^k M \subset (\pm)^l\{0, d\} \subset (\pm)^{k+l-1} M \quad (\text{ただし，} l = j + k)$$

が成り立ち，次の図式が導かれる：

$$C^{\pm\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\gamma_1} C^{(\pm)^k M}(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\gamma_2} C^{(\pm)^l\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X)$$
$$\xrightarrow{\gamma_3} C^{(\pm)^{k+l-1} M}(\mathbb{R}^\infty, X)$$

ここで，$\gamma_2\gamma_1$，$\gamma_3\gamma_2$ は包含写像 $\pm\{0, d\} \subset \pm\{0, d\}^l$, $(\pm)^k M \subset (\pm)^{k+l-1} M$ から導かれるので，定理 8 により共に弱同値である。したがって，γ_1 も弱同値である。かくて，弱ホモトピー同値写像の鎖

$$C^{\pm\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X) \xrightarrow{\simeq} C^{(\pm)^k M}(\mathbb{R}^\infty, X) \xleftarrow{\simeq} C^M(\mathbb{R}^\infty, X).$$

が存在するが，$C^{\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は本来の配置空間 $C(\mathbb{R}^\infty, X)$ と同相なので，その群完備化 $C^{\pm\{0,d\}}(\mathbb{R}^\infty, X)$ は $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ に弱同値である。(Barratt-Priddy-Quillen 定理)

5.3 連結 K ホモロジー

$M = \mathrm{Gr}(\mathbb{R}^\infty)$ から得られる一般ホモロジー論は連結 K ホモロジーである。

6 問題

いくつかの問題を挙げておく。

- ラベル付き配置空間から得られる一般ホモロジー論は連結なものに限られる。したがって，連結でない一般ホモロジー論を定義するような連続関手の構成法を見つけることは興味深い問題である。とくに周期的 K 理論の場合が重要である。
- ボルディズム論を表す連続関手を構成せよ。
- 連続関手を用いて一般ホモロジー論の積構造を記述せよ。
- 同変ホモロジー論への一般化について考察せよ。

参考文献

[1] J. Caruso. A simpler approximation to QX. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 265:163–167, 1981.

[2] D. Mcduff. Configuration spaces of positive and negative particles. *Topology*, 14:91–107, 1975.

[3] G. Segal. Configuration spaces and iterated loop-spaces. *Inventiones Math.*, 21:213–221, 1973.

[4] K. Shimakawa. Configuration spaces with partially summable labels and homology theories. *Math. J. Okayama Univ.*, 43:43–72, 2001.

[5] K. Shimakawa. Labeled configuration spaces and group completions. *Forum Math.*, 2006. in press.